

# ロジスティック曲線の解析

中村義作, 小林みどり

## Analysis of Logistic Curves

Gisaku NAKAMURA and Midori KOBAYASHI

### Abstract

We will show that logistic curves explain many trends of growth, such as economic growth and increase in population, taking the case of the telephone penetration rate. We will extend logistic curves to the general sigmoid curves and give some examples using probability density functions.

### 1. ロジスティック曲線とは

社会現象や経済現象において、時間と共に生長(増加)する状態が最初に考察されたのは、人口にたいしてである。十分な食糧資源と快適な生活環境の中では、人口が幾何級数的に増加することは、すでに16世紀末に分かっていた。イギリスの経済学者マルサス(T. R. Malthus)は、生活資源が算術級数的にしか増加しないことから、幾何級数的な人口増加は貧困と悪徳などによって抑制(妨害)されることを指摘した。これが有名な人口論で、初版は1798年、再版は1803年に出版されている。これにたいして、ベルギーの統計学者ケトレー(L. A. J. Quetelet)は、物理現象からの類推で、人口増加にたいする抵抗(妨害)は人口増加の速度に比例すると考えた。しかし、これ以上の定式化はしなかった。

人口増加の様相を最初に定式化したのは、ベルギーの数学者フェルフルスト(P. F. Verhulst)である。かれは、人口増加にたいする抵抗(妨害)を人口そのものの関数と考え、増加速度を

$$\frac{dP(t)}{dt} = mP(t) - f[P(t)] \quad (1.1)$$

という微分方程式で表した。ここに、 $P(t)$ は時刻 $t$ における人口、 $f[P(t)]$ は $P(t)$ の適当な関数、 $m$ は定数(パラメーター)である。 $f[P(t)]$ として、とくに

$$f[P(t)] = k[P(t)]^2 \quad (1.2)$$

とおくと、式(1.1)は

$$\frac{dP(t)}{dt} = mP(t) - k[P(t)]^2 \quad (1.3)$$

となり、解は

$$P(t) = \frac{K}{1 + b e^{-mt}}, \quad (\text{ただし, } K = \frac{m}{k}) \quad (1.4)$$

となる。これが解であることは、式(1.4)を実際に $t$ で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= \frac{K b m e^{-mt}}{(1 + b e^{-mt})^2} \\ &= \frac{K m - K m + K b m e^{-mt}}{(1 + b e^{-mt})^2} \\ &= \frac{K m (1 + b e^{-mt}) - K m}{(1 + b e^{-mt})^2} \\ &= \frac{K m}{1 + b e^{-mt}} - \frac{K m}{(1 + b e^{-mt})^2} \\ &= mP(t) - k[P(t)]^2 \end{aligned}$$

と変形すれば明らかである。

式(1.4)において、 $t \rightarrow -\infty$ ,  $t \rightarrow \infty$ にすると、

$$P(-\infty) = 0, \quad P(\infty) = K \quad (1.5)$$

となる。また、 $P(t)$ の増加傾向を調べるため、式(1.4)の両辺を $t$ で微分すれば、

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{K b m e^{-mt}}{(1 + b e^{-mt})^2} \quad (1.6)$$

となる。この分母は正のため、

$$K > 0, \quad b > 0, \quad m > 0 \quad (1.7)$$

が成り立てば、

$$\frac{dP(t)}{dt} > 0 \quad (1.8)$$

となる。これは、 $P(t)$ が0から $K$ まで単調に増加することを示す。以下では、式(1.7)が成り立つとして、考察を進める。

つぎに、 $P(t)$ の増加状況をさらに詳しく調べるため、式(1.3)の両辺を $t$ について微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2P(t)}{dt^2} &= \frac{dP(t)}{dt} [m - 2kP(t)] \\ &= \frac{dP(t)}{dt} \times 2k \left[ \frac{K}{2} - P(t) \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

となる。ここで、式(1.7)、式(1.8)と式(1.4)の括弧内に注意すると、

$$\frac{dP(t)}{dt} \times 2k > 0$$

である。このため、 $\frac{d^2P(t)}{dt^2}$ の正負は $\left[\frac{K}{2} - P(t)\right]$ の正負と一致する。ところが、すでに示したように、 $P(t)$ は0から $K$ まで単調に増加する。このため、 $P(t)$ の増加率は、 $P(t)$ がちょうど半分の $\frac{K}{2}$ に達するまでは次第に増加し、それを越えると徐々に減少する

ことが分かる。図1はこの様相を示したもので、S字型(シグモイド)に増加する。

フェルフルストは、このようにS字型に上昇する曲線をロジスティック曲線と名づけた。ここに、ロジスティック(logistic)というのは、第1線の戦士を支援するために、後方から軍需品や食料の修理・補給を行う第2戦部隊の活動のことで、日本では兵站と呼んでいる。しかし、この研究は、当時はほとんど注目されなかった。

今世紀に入って、アメリカにおける人口増加の状態を研究していた人口統

計学者パール(R. Pearl)は、フェルフルストとはまったく独立に、同じS字型の曲線を見出した。かれは、さらにキイロショウジョウバエの繁殖にたいする観察で、実験個体群の密度増加が進むにつれて、産卵数の減少と死亡率の増加が引き起こされ、結果的に個体群の増加はロジスティック曲線にしたがうことを、共同研究者のパーカー(S. L. Parker)とともに実証した。こ

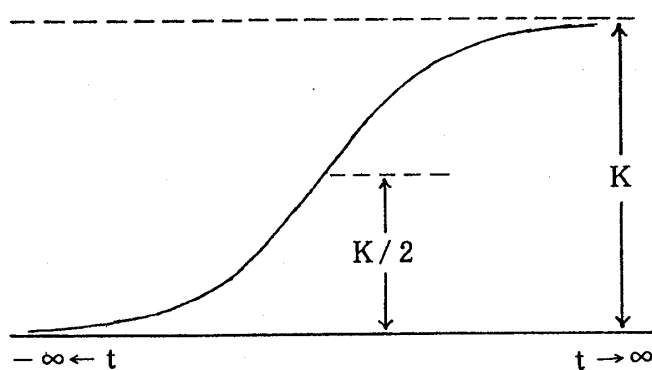


図1 ロジスティック曲線

れによって、フェルフルストの研究も見直され、ロジステック曲線は確かな地位を占めることになった。

## 2. 電話普及率によるロジスティック曲線の導出

ロジスティック曲線がなぜ社会現象や経済現象の成長を表すかは、電話普及率を対象にすると、明快な説明がつく。また、この考察から、ロジスティック曲線の一般化も可能になる。以下では、これらについての考察をする。

話を分かりやすくするため、電話がそれほど普及していない開発途上国を考える。この国では、最終的にはどの所帯も1本ずつの電話を持つものとし、電話を持たない所帯が、どういう契機で電話を持つかの理由を考える。すると、常識的には、電話をどのくらいかけたくなるかの頻度に比例する。電話をそれほどかけたくなければ、電話は欲しくならないし、頻繁にかける必要があれば、ぜひとも電話が欲しくなるからである。この電話需要を巨視的に把握するため、時点  $t$  での所帯数を  $K(t)$ 、電話を持っている所帯数を  $S(t)$  として、電話普及率を

$$p(t) = \frac{S(t)}{K(t)} \quad (2.1)$$

で表す。すると、うえに述べたように、電話需要を引き起こすのは、電話を持たない所帯が、電話を持っている所帯に、どのくらいの割合で電話をかけたくなるかの頻度に比例する。これを電話普及率で表すと、電話を持たない所帯数は  $1 - p(t)$  に比例し、電話を持っている所帯数は  $p(t)$  に比例するので、巨視的には  $p(t)[1 - p(t)]$  に比例すると解釈できる。このため、 $t$  から  $t + \Delta t$  までの微小時間  $\Delta t$  を考えると、その間の電話普及率の増加は

$$\begin{aligned} \Delta p(t) &= p(t + \Delta t) - p(t) \\ &= m p(t)[1 - p(t)] \Delta t \end{aligned} \quad (2.2)$$

で表される。ここに、 $m$  は比例定数である。

いま、 $\Delta t$  を 0 に近づけると、式(2.2)は

$$\frac{d p(t)}{d t} = m p(t)[1 - p(t)] \quad (2.3)$$

となる。ただし、所帯数  $K(t)$  は十分に多いため、差分は微分におきかえられるとした。

式(2.3)は電話普及率  $p(t)$  にたいする微分方程式で、式(1.3)と酷似している。式(1.3)の  $P(t)$  を  $p(t)$  に変え、 $k = m$  とすれば、式(1.3)は式(2.3)に一致する。このため、解も得られている。しかし、式(1.3)の微分方程式では、式(1.4)の解を天下りの与え、それが式(1.3)を満たすことを示しただけである。ここでは観点を変え、式(2.3)の微分方程式を直接に解いてみる。この方法は、ロジスティック曲線を一般化するとき有効である。

電話を持っている所帯が少しでもあれば[つまり、 $S(t) > 0$ ]、式(2.1)から

$$p(t) > 0$$

である。そこで、式(2.3)の両辺を  $[p(t)]^2$  で割れば、

$$\frac{1}{[p(t)]^2} \frac{d p(t)}{d t} = \frac{m}{p(t)} - m \quad (2.4)$$

となる。ところが、

$$\frac{1}{[p(t)]^2} \frac{d p(t)}{d t} = - \frac{d}{d t} \left[ \frac{1}{p(t)} \right]$$

であるから、式(2.4)は変形されて

$$\frac{d}{d t} \left[ \frac{1}{p(t)} \right] + \frac{m}{p(t)} = m$$

となる。この両辺に  $e^{mt}$  をかけると、左辺は

$$e^{mt} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{p(t)} \right] + e^{mt} \frac{m}{p(t)} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{e^{mt}}{p(t)} \right]$$

と変形されるので、式(2.3)は

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{e^{mt}}{p(t)} \right] = m e^{mt}$$

となる。この両辺を  $t$  について積分すると、

$$\frac{e^{mt}}{p(t)} = e^{mt} + C$$

となる。ここに、 $C$  は積分定数である。これから、 $p(t)$  は

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{e^{mt}}{e^{mt} + C} \\ &= \frac{1}{1 + C e^{-mt}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。

積分定数  $C$  は、時点の選び方で決まる。いま、電話普及率がちょうど  $\frac{1}{2}$  になる時点を原点に選ぶと、

$$p(0) = \frac{1}{1 + C} = \frac{1}{2}$$

から、

$$C = 1$$

となる。こうして、電話普及率  $p(t)$  は

$$p(t) = \frac{1}{1 + e^{-mt}} \quad (2.6)$$

となる。また、電話普及率がちょうど  $\frac{1}{2}$  になる時点を  $t = s$  とすれば、 $p(t)$  は

$$p(t) = \frac{1}{1 + e^{-m(t-s)}} \quad (2.7)$$

となる。

式(2.7)を変形すると、

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-m(t-s)}}{1 + e^{-m(t-s)}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{e^{m(t-s)/2} - e^{-m(t-s)/2}}{e^{m(t-s)/2} + e^{-m(t-s)/2}} \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、双曲線正接関数(hyperbolic tangent function)の定義を思い起こすと、

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (2.8)$$

であるから、 $p(t)$  は

$$p(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \frac{m(t-s)}{2} \right\} \quad (2.9)$$

とも表される。

式(2.9)は、双曲線正接関数によるロジスティック曲線の表示である。ここに、双曲線関数には、双曲線正接関数の他に、双曲線正弦関数や双曲線余弦関数などがあり、双曲線上の点に

に基づいて定義される。これは、ふつうの三角関数(正弦関数, 余弦関数, 正接関数など)が円周上の点に基づいて定義されるのとはほぼ同じである。

以上が、電話普及率の解析に基づくロジスティック曲線の解釈で、その解釈と導出は明快である。

### 3. ロジスティック曲線の一般化

前節で導いたロジスティック曲線は、微小時間  $\Delta t$  での電話普及率の増加状況を詳しく考察すると一般化できる。これには、「所帯数  $K(t)$  は時間とともに増加する」という仮定が必要であるが、多くの国の人口は増加しているので、おおむね妥当な仮定である。このとき、新たに増加する所帯、つまり  $[K(t + \Delta t) - K(t)]$  は、当然のことながら、当初は電話を持っていないとする。これが、ロジスティック曲線を一般化するときの前提である。

この前提に立つと、 $t$  から  $t + \Delta t$  までの微小時間を考えたとき、その間に電話を持つ所帯は、時点  $t$  での電話普及率に起因するので、時点  $t$  で電話を持っていない所帯に限られる。このため、式(2.2)の左辺の  $\Delta p(t)$  は

$$\begin{aligned}\Delta p(t) &= \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{K(t)} \\ &= \frac{S(t + \Delta t)}{K(t)} - \frac{S(t)}{K(t)} \\ &= \frac{K(t + \Delta t)}{K(t)} \frac{S(t + \Delta t)}{K(t + \Delta t)} - \frac{S(t)}{K(t)} \\ &= \frac{K(t + \Delta t)}{K(t)} p(t + \Delta t) - p(t)\end{aligned}\quad (2.10)$$

となる。ここで、 $K(t + \Delta t)$  を  $\Delta t$  について展開すると、 $\Delta t$  は微小時間なので、

$$K(t + \Delta t) = K(t) + K'(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

となる。ここに、 $o(\Delta t)$  は  $\Delta t$  より高次の微小項である。これから、 $\Delta p(t)$  は

$$\begin{aligned}\Delta p(t) &= \left\{1 + \frac{K'(t)}{K(t)} \Delta t + o(\Delta t)\right\} p(t + \Delta t) - p(t) \\ &= \{p(t + \Delta t) - p(t)\} + \frac{K'(t)}{K(t)} p(t + \Delta t) \Delta t + o(\Delta t)\end{aligned}$$

となり、式(2.2)の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned}\{p(t + \Delta t) - p(t)\} + \frac{K'(t)}{K(t)} p(t + \Delta t) \Delta t + o(\Delta t) \\ = m p(t) [1 - p(t)] \Delta t\end{aligned}$$

となる。この両辺を  $\Delta t$  で割ってから、 $\Delta t$  を 0 に近づけると、

$$\frac{dp(t)}{dt} + \frac{K'(t)}{K(t)} p(t) = m p(t) [1 - p(t)] \quad (2.11)$$

となる。式(2.11)は式(2.3)を一般化した微分方程式で、 $K(t)$  が一定のときは式(2.3)に一致する。このことは、所帯数  $K(t)$  が不変のときだけ、電話普及率はロジスティック曲線にしたがうことを示している。

式(2.11)の微分方程式は、前節の解法を踏襲すると簡単に解ける。まず、両辺を  $[p(t)]^2$  で割ると、

$$\frac{1}{[p(t)]^2} \frac{dp(t)}{dt} + \frac{K'(t)}{K(t)} \frac{1}{p(t)} = \frac{m}{p(t)} - m \quad (2.12)$$

となる。

式(2.12)を解くには、 $\frac{m}{p(t)}$ を左辺に移項してから、両辺に $\frac{e^{mt}}{K(t)}$ をかけ、

$$\begin{aligned} \frac{e^{mt}}{K(t)} \frac{1}{[p(t)]^2} \frac{dp(t)}{dt} + \frac{K'(t)e^{mt}}{K(t)^2} \frac{1}{p(t)} \\ - \frac{e^{mt}}{K(t)} \frac{m}{p(t)} = -m \frac{e^{mt}}{K(t)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

と変形する。すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{e^{mt}}{K(t)} \frac{1}{p(t)} \right\} &= \frac{e^{mt}}{K(t)} \frac{d}{dt} \frac{1}{p(t)} + \frac{1}{p(t)} \frac{d}{dt} \frac{e^{mt}}{K(t)} \\ &= -\frac{e^{mt}}{K(t)} \frac{1}{[p(t)]^2} \frac{dp(t)}{dt} \\ &\quad + \frac{1}{p(t)} \left( \frac{m e^{mt}}{K(t)} - \frac{K'(t)e^{mt}}{K(t)^2} \right) \end{aligned}$$

が成り立つため、式(2.13)は

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{e^{mt}}{K(t)} \frac{1}{p(t)} \right\} = m \frac{e^{mt}}{K(t)} \quad (2.14)$$

となる。この両辺を $t$ について積分すると、

$$\frac{e^{mt}}{K(t)} \frac{1}{p(t)} = m \int^t \frac{e^{mu}}{K(u)} du + C$$

となる。これから、 $p(t)$ は

$$p(t) = \frac{e^{mt}}{K(t)} \frac{1}{m \int^t \frac{e^{mu}}{K(u)} du + C} \quad (2.15)$$

となる。ここに、 $C$ は積分定数で、その値は $p(t_0)$ と $K(t_0)$ の値( $t_0$ は初期時点)と、 $u$ の積分下限から決められる。これを具体的に示すため、初期時点をと $t_0=0$ 、 $u$ の積分下限を0にとれば、簡単な計算から

$$C = \frac{1}{K(0)p(0)} \quad (2.16)$$

となる。このため、式(2.15)は

$$p(t) = \frac{e^{mt}}{K(t)} \frac{1}{m \int_0^t \frac{e^{mu}}{K(u)} du + \frac{1}{K(0)p(0)}} \quad (2.17)$$

となる。ここに、 $t=0$ における電話普及率 $p(0)$ は、初期値として事前に与えられるものである。式(2.17)はロジスティック曲線を一般化したもので、所帯数 $K(t)$ を一般の関数で与える限り、これ以上の計算はできない。そこで、特別の場合を2例ほど示す。

まず、所帯数 $K(t)$ を一定値 $K$ にすると、

$$K(t) = K(u) = K(0) = K$$

となり、式(2.17)は

$$p(t) = \frac{e^{mt}}{(e^{mt} - 1) + \frac{1}{p(0)}} \quad (2.18)$$

となる。この式は、容易に確かめられるように、

$$p(0) = \frac{1}{2}$$

とくと、式(2.6)に一致する。

つぎに、所帯数 $K(t)$ はロジスティック曲線にしたがうとすると、式(1.4)から

$$P(t) = \frac{K}{1 + b e^{-mt}} \quad [(1.4)の再掲]$$

である。ここで、時間の原点( $t = 0$ )を

$$K(0) = \frac{K(\infty)}{2}$$

に選ぶと、 $b$ は1となり、 $K(t)$ は

$$K(t) = \frac{K}{1 + e^{-at}} \quad (2.19)$$

となる。ただし、パラメーターは $a$ に置き換えた。

このときは、 $a$ が $m$ に等しいかどうかで、2つの場合に分けられる。まず、 $a$ が $m$ に等しくないときは、式(2.19)を式(2.17)の右辺の $K(u)$ に代入すると、積分は

$$\int_0^t \frac{e^{mu}}{K(u)} du = \frac{1}{K} \int_0^t \{ e^{mu} + e^{(m-a)u} \} du \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{K} \left( \frac{e^{mt} - 1}{m} + \frac{e^{(m-a)t} - 1}{m-a} \right) \quad (2.21)$$

と計算されるので、

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{K} \frac{e^{mt}(1 + e^{-at})}{\frac{m}{K} \left( \frac{e^{mt} - 1}{m} + \frac{e^{(m-a)t} - 1}{m-a} \right) + \frac{2}{K p(0)}} \\ &= \frac{e^{mt}(1 + e^{-at})}{e^{mt} - 1 + \frac{m(e^{(m-a)t} - 1)}{m-a} + \frac{2}{p(0)}} \\ &= \frac{1 + e^{-at}}{1 + \frac{2 - p(0)}{p(0)} e^{-mt} + \frac{m}{m-a} (e^{-at} - e^{-mt})} \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。また、 $a$ が $m$ に等しいときは、式(2.20)の左辺の積分は

$$\int_0^t \frac{e^{mu}}{K(u)} du = \frac{1}{K} \int_0^t (e^{mu} + 1) du = \frac{1}{K} \left( \frac{e^{mt} - 1}{m} + t \right)$$

となるので、

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{K} \frac{e^{mt}(1 + e^{-mt})}{\frac{m}{K} \left( \frac{e^{mt} - 1}{m} + t \right) + \frac{2}{K p(0)}} \\ &= \frac{e^{mt} + 1}{e^{mt} + mt - 1 + \frac{2}{p(0)}} \\ &= \frac{1 + e^{-mt}}{1 + mt e^{-mt} + \frac{2 - p(0)}{p(0)} e^{-mt}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。

### 3. シグモイド曲線の一族

ロジスティック曲線は、S字型(シグモイド)に上昇することを節1で指摘した。これは、中間点に達するまでは、増加の傾向を次第に大きくし、中間点以降は、増加の傾向を徐々に小さくするものである。しかも、すぐ後に示すように、曲線上の中間点を軸にして、左右の曲線は点対称になっている。このため、中間点以前の曲線を中間点で180度回転すると、中間点以降の曲線がそっくり現れる。

この点対称の性質を示すには、中間点に到達する時点が  $t = 0$  のときのロジスティック曲線を考えるのが分かりやすい。すると、中間点では

$$K(0) = \frac{K(\infty)}{2} = \frac{K}{2}$$

が成り立つので、任意の  $t$  にたいして

$$\frac{K(-t) + K(t)}{2} = \frac{K}{2} \quad (3.1)$$

を示せば十分である。

このロジスティック曲線は、 $a$  をパラメーターとすると、式(2.19)で与えられている。これを式(3.1)の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{K(-t) + K(t)}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{K}{1 + e^{-at}} + \frac{K}{1 + e^{-a(-t)}} \right) \\ &= \frac{K \{ (1 + e^{-at}) + (1 + e^{-a(-t)}) \}}{2(1 + e^{-at})(1 + e^{-a(-t)})} \\ &= \frac{K(2 + e^{-at} + e^{-a(-t)})}{2(1 + e^{-at} + e^{-a(-t)} + 1)} = \frac{K}{2} \end{aligned}$$

となって、確かに式(3.1)が成り立っている。

つぎに、ロジスティック曲線の拡張として、一般的なS字型の上昇曲線を考える。この曲線は、ロジスティック曲線と同じように、0からKまで単調に増加し、中間点の  $\frac{K}{2}$  に達するまでは増加傾向を次第に大きくし、中間点以降は逆に増加傾向を徐々に小さくする。しかも、中間点を軸にして、左右の曲線が点対称になっている。このような曲線を、その形状がS字型であることから、シグモイド曲線(sigmoid curve)と呼ぶ。シグモイド曲線という呼び方は、近年の発展が著しいニューロ・コンピューターの分野で使われているが、そこに登場するシグモイド曲線は、筆者らの知る限り、ロジスティック曲線に限られている。この節では、ロジスティック曲線を特殊の場合として含むシグモイド曲線の一族を考えるが、これは社会的(または経済的)な生長曲線を対象にするだけでなく、ニューロ・コンピューターへの新しい応用も意図している。

図2は代表的なシグモイド曲線の例で、とくに

$$K = 1 \quad (3.2)$$

としてある。しかし、高さをK倍すれば、いつでも一般のシグモイド曲線が得られるので、これでも一般性は失われない。このため、以下では式(3.2)が成り立つとして、シグモイド曲線を

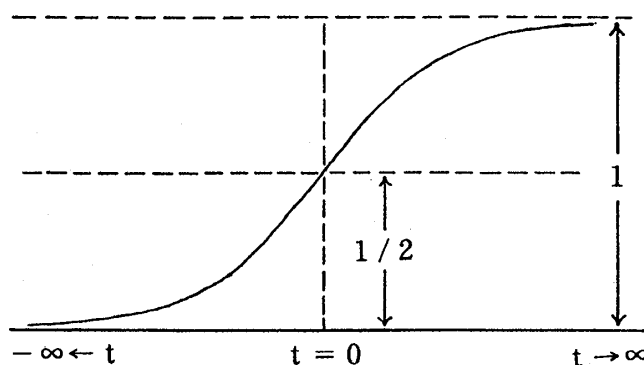


図2 シグモイド曲線



考察する。

シグモイド曲線は、その全貌をほぼ図2が示している。しかし、数学的に定義しておく、後の考察に便利である。このため、常識的ではあるが、ごく簡単に説明する。一般のシグモイド曲線を $S(t)$ で表すと、0から1まで単調に増加するので、

$$\left. \begin{aligned} S(-\infty) &= 0 \\ S(\infty) &= 1 \\ S'(t) &> 0, \quad -\infty < t < \infty \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

である。ここに、 $S'(t)$ は1階の導関数で、つねに存在すると仮定した。この仮定は、滑らかな曲線を考えるので自然である。

つぎに、 $S(t)$ は中間点を軸にして点対称なので、

$$S(-t) + S(t) = 1 \quad (3.4)$$

である。このため、 $t=0$ とすると、

$$S(0) = \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

となる。また、式(3.4)の両辺を微分すれば、

$$-S'(-t) + S'(t) = 0$$

となるので、移項すれば

$$S'(-t) = S'(t) \quad (3.6)$$

となる。これは、 $t=0$ を軸にして、 $S'(t)$ が左右に対称であることを示す。

つぎに、 $S(t)$ の増加傾向は、中間点に達するまでは次第に大きくなり、中間点を越えた後は徐々に小さくなる。これは、1階の導関数で表すと、

$$\left. \begin{aligned} 0 < S'(-t_2) < S'(-t_1) \\ S'(t_1) > S'(t_2) > 0 \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t_1 < t_2 \quad (3.7)$$

である。ただし、どちらか一方を与えれば、もう一方は式(3.6)から求まる。ここで、2階の導関数 $S''(t)$ も存在すると仮定すると、式(3.6)の両辺を微分したのち、 $t=0$ とおくことによって、

$$S''(0) = 0 \quad (3.8)$$

となる。

式(3.6)～式(3.8)は、 $S'(t)$ の形状をよく説明している。この曲線は、原点を中心にして左右に対称な曲線で、富士山のような形をしている。図3はこれを示したもので、もはや説明は不要である。なお、 $S(t)$ を $-\infty$ から $\infty$ まで積分すると、式(3.3)から

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S'(t) dt \\ = S(\infty) - S(-\infty) = 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる。これは、 $S'(t) > 0$ であることに注意すると、 $S'(t)$ が $t$ にたいする確率密度関数であることを示している。このため、シグモイド曲線を求めるとき、それに対応する確率密度関数を調べてもよいことになる。

以上で、シグモイド曲線の基本的な性質を述べたので、具体的なシグモイド曲線を求める。

まず、最初に思い浮かべるのは、 $\tan^{-1} t$ である。 $\tan t$ は、 $t = -\frac{\pi}{2}$ で $-\infty$ 、 $t = \frac{\pi}{2}$ で $\infty$

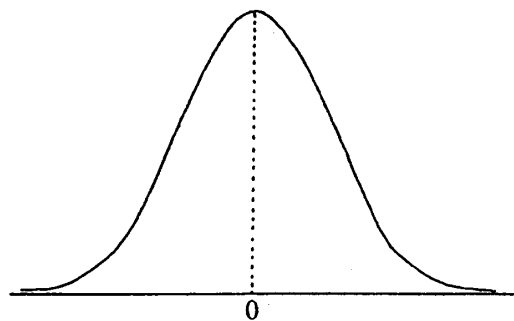
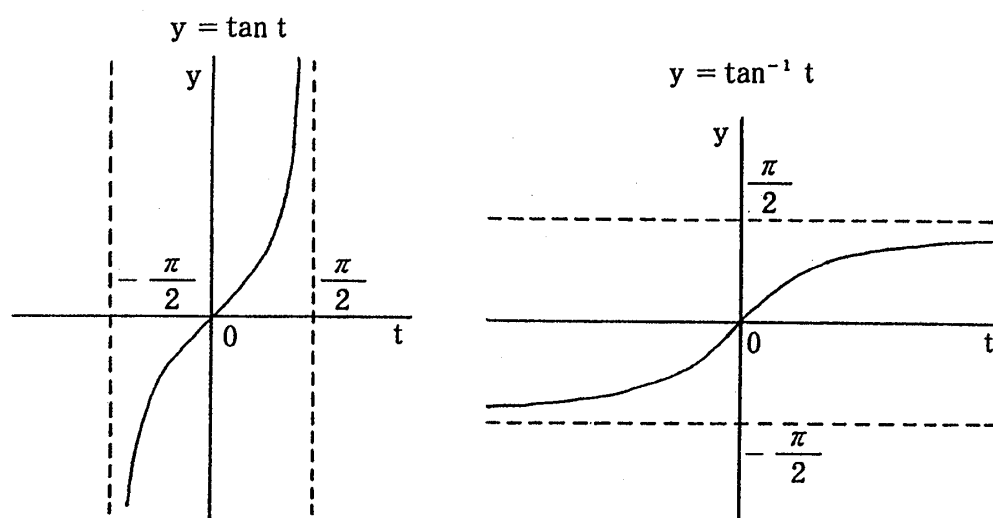


図3  $S'(t)$ の曲線

図4  $\tan t$  と  $\tan^{-1} t$  の曲線

となり、その曲線は図4の左側となる。この逆関数の  $\tan^{-1} t$  は、縦軸と横軸を入れ換えたものなので、その曲線は図4の右側となる。これはシグモイド曲線と同じ形をしているが、

$$\tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}, \quad \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

であるから、高さが違っている。このため、式(3.3)の最初の2式を満たすように調整すれば、

$$S_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} t \quad (3.10)$$

はシグモイド曲線となる。なお、この両辺を微分すると、これに対応する確率密度関数は、

$$S_1'(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)} \quad (3.11)$$

となる。これはコーシー分布と呼ばれるもので、平均が存在しない(発散する)ことで有名である。

式(3.11)を一般化すると、

$$S_k'(t) = \frac{1}{A_k(1+t^{2k})}, \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (3.12)$$

という確率密度関数を得る。ここに、 $A_k$ は

$$A_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^{2k}} dt$$

で定義される定数で、数学公式によると、

$$\frac{1}{A_k} = \frac{k}{\pi} \sin \frac{\pi}{2k} \quad (3.13)$$

となる。

式(3.12)を積分すると、これに基づくシグモイド曲線が得られる。しかし、その結果は級数の和となり、一般形を示すのは煩雑である。このため、 $k=2, 3$ のときを示すと、

$$S_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{4} \log \left| \frac{t^2 + \sqrt{2}t + 1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \right| + \frac{1}{2} \{ \tan^{-1}(\sqrt{2}t - 1) + \tan^{-1}(\sqrt{2}t + 1) \} \right] \quad (3.14)$$

$$S_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{3}}{8} \log \left| \frac{t^2 + \sqrt{3}t + 1}{t^2 - \sqrt{3}t + 1} \right| + \frac{1}{2} \tan^{-1} t \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \{ \tan^{-1}(2t - \sqrt{3}) + \tan^{-1}(2t + \sqrt{3}) \} \right] \quad (3.15)$$

となる。

これまでに、式(3.10)の  $S_1(t)$  [またはその導関数のコーシー分布] から出発して、ロジスティック曲線とは異なるシグモイド曲線を導いた。これらはさらに一般化できるが、それには確率密度関数(この積分はシグモイド曲線となる)の一般論を展開した方が便利である。

いま、任意のシグモイド曲線を  $S(t)$ 、その導関数を  $S'(t)$  とし、 $a$  を任意の正数とする。すると、 $S'(t)$  は  $y$  軸にたいして左右対称なため、 $[S'(t)]^a$  も  $y$  軸にたいして左右対称となる。しかも、 $S'(t)$  はつねに正であることと、

$$\frac{d}{dt} [S'(t)]^a = a [S'(t)]^{a-1} S''(t)$$

であることから、左辺は右辺の  $S''(t)$  と同符号になる。このとき、 $t$  から  $t + \Delta t$  までの微小区間を考えると、 $[S'(t)]^{a-1}$  は定数に近いので、左辺は  $S''(t)$  にほぼ比例する。このため、 $S'(t)$  が山の形をした滑らかな曲線であれば、 $[S'(t)]^a$  も同じように滑らかな曲線となる。こうして、

$$S'^a(t) = \frac{[S'(t)]^a}{A}, \quad (\text{ただし, } A = \int_{-\infty}^{\infty} [S'(u)]^a du) \quad (3.16)$$

は、 $y$  軸を中心にして左右に対称な確率密度関数となる。

式(3.16)の  $S'^a(t)$  と元の  $S'(t)$  の形状を比較すると、概略の説明はつぎのようになる。 $a > 1$  のときは、原点付近の  $S'^a(t)$  の傾斜は  $S'(t)$  の傾斜より急であるが、原点から遠く離れた左右の裾野では、逆に  $S'(t)$  の傾斜より緩やかである。 $a < 1$  のときはこの反対で、原点付近の傾斜は  $S'(t)$  の傾斜より緩やかであるが、原点から遠い左右の裾野では、 $S'(t)$  の傾斜より急になる。

式(3.16)は、1つのシグモイド曲線  $S(t)$  が与えられたとき、 $S'^a(t)$  を  $-\infty$  から  $t$  まで積分することによって、別のシグモイド曲線が得られることを示す。しかも、パラメーター  $a$  を変えることができるので、さまざまなシグモイド曲線が得られる。このため、これらはシグモイド曲線の一族を作ると解釈できる。

シグモイド曲線は、コーシー分布以外の確率密度関数からも得られる。まず、正規分布を考えると、 $y$  軸にたいして左右に対称な関数は、

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.17)$$

である。ここに、 $\sigma$  は標準偏差を表す。これに基づくシグモイド曲線は、右辺を形式的に積分して

$$S_N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du \quad (3.18)$$

とすればよい。ただし、実際に積分しようとすると、級数にでも展開しない限り、初等関数による表示は困難である。このため、 $\sigma = 1$  のときの  $S_N(t)$  の値は、統計数値表に必ず示されている(この数表から、 $\sigma \neq 1$  のときの値も簡単に求まる)。

つぎに、 $t$  分布を考えると、

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} \quad (3.19)$$

である。ここに、 $\Gamma(x)$ , (ただし  $x > 0$ ), はガンマー関数と呼ばれるもので,

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \Gamma(1) = 1$$

の性質を持つ。このため、 $x$  が正整数のときは,

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\cdots 2 \cdot 1 = (x-1)!$$

となり、正整数でないときの  $\Gamma(x)$  は階乗の拡張と解釈できる。

式(3.19)の  $t$  分布をよく見ると、式(3.11)のコーシー分布の  $t$  を  $\frac{t}{\sqrt{k}}$  におき直してから、式(3.16)を適用したものとなっている。このため、これに基づくシグモイド曲線は、一般論からすでに考察済みである。

確率論や統計学でよく使われる確率密度関数は、左右に対称な連続関数に制限すると、正規分布と  $t$  分布の2つである。その他の確率密度関数は、 $t > 0$  で定義されているものが多く、そのままではシグモイド曲線に使えない。

以上で、シグモイド曲線の解析を終わるが、これらの一族が社会現象や経済現象にたいする生長曲線を表すかどうかは、今後の検討課題である。また、ニューロ・ネットワークにおいても、ここに示したシグモイド曲線が、ロジスティック曲線より優れているかどうかは未検討である。ただ、ニューロ・ネットワークによる学習では、非線形の閾値関数を使うことが主眼なので、コーシー分布に基づくシグモイド曲線などは、解析に格好のように思える。