完全1因子分解から誘導されるDudeney集合について (II)

小林みどり, 喜安善市, 林田 侃

Dudeney sets induced from perfect 1-factorizations (II)

Midori KOBAYASHI, KIYASU-Zen'iti and Tsuyoshi HAYASHIDA

Abstract

A set of Hamilton cycles in the complete graph on n vertices is called a Dudeney set, if every path of length two lies on exactly one of the cycles. It has been conjectured that there is a Dudeney set for every complete graph, but it is still unsettled. Furthermore, little is known about the number of non-isomorphic Dudeney sets.

In the previous paper, we constructed two types of new Dudeney sets using perfect 1-factorizations and determined the numbers of these Dudeney sets.

In this paper, we show Dudeney sets of these types are not isomorphic, so the number of them are determined.

$K_n = (V_n, E_n)$ を n 個の頂点をもつ完全グラフとする．$n = p+1$, $r = (p-1)/2$ とおく．ここで，p は奇素数，≥ 7 である．

任意の 2-path (長さ 2 の path) をちょうど 1 回ずつ含むような Hamilton 閉路の集合を K_n の Dudeney 集合という．$V_n = \{\infty\} \cup GF(p) = \{\infty\} \cup \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$ とおき，1 因子 F_i $(0 \leq i \leq p-1)$ を $F_i = \{\{\infty, i\}\} \cup \{\{a, b\} \in E_n \mid a, b \neq \infty, a+b \equiv 2i \pmod p\}$ と定義すると，$\mathcal{F} = \{F_i \mid 0 \leq i \leq p-1\}$ は K_n の 完全 1 因子分解 であり，$\mathcal{D} = \{F_i \cup F_j \mid 0 \leq i < j \leq p-1\}$ は K_n の Dudeney 集合である．

[1] では，$\mathcal{D}$ を変形することにより，2 種類 (I 型と II 型) の Dudeney 集合を構成し，I 型と II 型の Dudeney 集合の個数をそれぞれ決定した．この論文では，I 型と II 型の Dudeney 集合は非同型であることを証明する．それによって，I 型と II 型をあわせた Dudeney 集合の個数が決定される．

$\mathcal{D}$ を次のように分解する．

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_0^c \\ \mathcal{D}_0 &= \{F_0 \cup F_i \mid 1 \leq i \leq p-1\} \\ \mathcal{D}_0^c &= \{F_i \cup F_j \mid 1 \leq i < j \leq p-1\} \end{aligned}$$

$R = \{\rho : V_n \to V_n$ 全単射 $\mid \rho F_0 = F_0\}$ とおき，$\rho \in R$ について $\mathcal{D}(\rho) = \rho\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_0^c$ と定義すると，$\mathcal{D}(\rho)$ は Dudeney 集合となる．これは I 型 Dudeney 集合と呼ばれる [1].

次に，素数 p が $p \equiv 3 \pmod 4$ で，$< 2 >$ の $GF(p)^*$ における指数が 2 であるとする．そのとき，$< 2 >= \{1, 2, 4, 8, \cdots, \} \subset GF(p)^*$ は mod p の half-set であるから，

$$F_0 \cup F_1, F_0 \cup F_2, F_0 \cup F_4, F_0 \cup F_8, \cdots$$

を回転させることにより前述の Dudeney 集合 $\mathcal{D}$ が得られる．すなわち τ_a を V_n の置換で

$$\tau_a(y) = \begin{cases} y+a & (y \in GF(p)) \\ \infty & (y = \infty) \end{cases}$$

と定義し，$\mathcal{B}_0 = \{F_0 \cup F_i \mid i \in < 2 >\}$，$\mathcal{B}_1 = \tau_1\mathcal{B}_0$，$\mathcal{B}_2 = \tau_2\mathcal{B}_0$，$\cdots$，$\mathcal{B}_{p-1} = \tau_{p-1}\mathcal{B}_0$ とおくと，$\mathcal{D} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{p-1}$ である．

頂点の置換 $\rho_{\infty i}$ $(0 \leq i \leq p-1)$ を $\rho_{\infty i} = (\infty\ i)$ と定義する．$\{0,1,\cdots,p-1\}$ の任意の部分集合 I に対して，

$$\mathcal{D}(I) = (\cup_{i \in I}\rho_{\infty i}\mathcal{B}_i) \cup (\cup_{i \notin I}\mathcal{B}_i)$$

と定義すると $\mathcal{D}(I)$ は Dudeney 集合となる．これは II 型 Dudeney 集合と呼ばれる．

Dudeney 集合は Hamilton 閉路の集合であり，Hamilton 閉路は 2 つの 1 因子に分解できる．I 型 Dudeney 集合と II 型 Dudeney 集合が非同型であることを証明するために，それらの Dudeney 集合に属する 1 因子の種類と個数に注目する．

補題 1　I 型 Dudeney 集合 $\mathcal{D}(\rho)$ $(\rho \neq id)$ に属する 1 因子について次が成り立つ．
(1) F_0 はちょうど $p-1$ 個ある．
(2) F_i は $p-2$ 個以上ある．$(1 \leq i \leq p-1)$
(3) ρF_i は 1 個以上ある．ただし $\rho F_i \neq F_0$. $(1 \leq i \leq p-1)$

II 型 Dudeney 集合 $\mathcal{D}(I)$ において，1 因子 $\rho_{\infty i}F_k$ (ただし $i \in I$，$F_i \cup \rho_{\infty i}F_k \in \rho_{\infty i}\mathcal{B}_i$) は全て異なることより，次の補題が成り立つ．$|I| = t$ とおく．

補題 2　$\mathcal{D}(I)$ にちょうど 1 個属している 1 因子はちょうど rt 個ある．

補題 3　$\mathcal{D}(\{0\}) = \rho_{\infty 0}\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{p-1}$ に属する 1 因子について次が成り立つ．
(1) F_0 はちょうど $p-1$ 個ある．
(2) F_i はちょうど $p-2$ 個ある．$(1 \leq i \leq p-1,\ i \in < 2 >)$
(3) $\rho_{\infty 0}F_i$ はちょうど 1 個ある．$(1 \leq i \leq p-1,\ i \in < 2 >)$
(4) F_i はちょうど $p-1$ 個ある．$(1 \leq i \leq p-1,\ i \notin < 2 >)$

これらの補題をもとに，I 型と II 型の Dudeney 集合が，$\mathcal{D}$ を除き非同型であることを示す．

定理　$\rho \neq id, I \neq \emptyset$ ならば，$\mathcal{D}(\rho) \not\cong \mathcal{D}(I)$ である．

証明　$\mathcal{D}(\rho) \cong \mathcal{D}(I)$ であると仮定し，同型対応を与える頂点の置換を Y とおく．$Y : \mathcal{D}(\rho) \to \mathcal{D}(I)$.

$\mathcal{D}(I)$ に属する 1 因子のうち，1 個しか現れない 1 因子は rt 個あり（補題 2 ），それらは F_i $(i \in I)$ との union の形で $\mathcal{D}(I)$ に含まれている．しかし，$\mathcal{D}(\rho)$ に属する 1 因子のうち，1 個しか現れない 1 因子は全て F_0 との union となっている．よって $|I| = t = 1$ でなければな

らない．$I=\{i_1\}$ とする．$\mathcal{D}(\{i_1\})$ と $\mathcal{D}(\{0\})$ は同型であるので，以下，$\mathcal{D}(\rho)\cong\mathcal{D}(\{0\})$ として矛盾を導く．

$\mathcal{D}(\rho)$ の ρF_i $(1\le i\le p-1)$ は形式上１個ずつあるが，$\mathcal{D}(\{0\})$ と同型であるから，そのうちの r 個は１個ずつで，残りの r 個は $p-1$ 個ずつあることになる．よって補題３より，

$$Y(\{\rho F_i \mid 1\le i\le p-1\})=\{\rho_{\infty 0}F_i \mid i\in<2>\}\cup\{F_i \mid i\notin<2>\}$$

である．

$\{F_i \mid 1\le i\le p-1\}$ は完全１因子分解の部分集合であるから，$\{\rho F_i \mid 1\le i\le p-1\}$ のどの２つの１因子も Hamilton 閉路を作る．

$\rho_{\infty 0}F_1\cup F_{-1}$ を考える．(2 の $GF(p)^*$ における位数が $(p-1)/2$ であることから，2 は $GF(p)^*$ において平方剰余である．$p\equiv 3 \pmod 4$ という仮定から -1 は平方剰余ではない．よって，$-1\notin<2>$.)

$$\rho_{\infty 0}F_1=\{\{\infty,2\},\{0,1\}\}\cup\{\{a,b\} \mid a+b\equiv 2 \pmod p,\ a,b\ne 0,1,2\}$$

$$F_{-1}=\{\{\infty,-1\}\}\cup\{\{a,b\} \mid a+b\equiv -2 \pmod p,\ a,b\ne -1\}$$

より，$\rho_{\infty 0}F_1\cup F_{-1}$ は $(0,1,-3,5,-7,\cdots,8,-6,4,-2)$ と $(\infty,2,-4,6,-8,\cdots,7,-5,3,-1)$ の２個の $n/2$ - cycle に分かれ，Hamilton 閉路とならない．矛盾．よって定理が成り立つ．

$\mathcal{D}(\rho)$ と $\mathcal{D}(I)$ の個数 $N_{\mathrm{I}}(n)$, $N_{\mathrm{II}}(n)$ は [1] で求められているので，I 型と II 型をあわせた Dudeney 集合の個数 $N(n)$ は，上の定理より

$$N(n)=N_{\mathrm{I}}(n)+N_{\mathrm{II}}(n)-1$$

であることがわかる．たとえば，$N(8)=16+12-1=27$，$N(24)=4391507800+33164-1=4391540963$ などである．

参考文献

[1] 小林, 喜安：完全1因子分解から誘導されるDudeney集合について, 経営と情報 **8** (1996) 13 - 32.