黒色1因子と Dudeney 集合

小林みどり, 武藤伸明, 喜安善市, 中村義作

Black 1-factors and Dudeney sets

Midori KOBAYASHI, Nobuaki MUTO, KIYASU-Zen'iti and Gisaku NAKAMURA

Dedicated to Professor M.Otsubo on the occasion of his retirement.

ABSTRACT

A set of Hamilton cycles in the complete graph K_n is called a [double] Dudeney set, if every path of length two lies on exactly one [two] of the cycles. It has been conjectured that there is a Dudeney set for every complete graph. It is known that there exists a Dudeney set of K_n when n is even, but it is still unsettled when n is odd.

In this paper, we define a black 1-factor and we show that if there exists a black 1-factor of K_n, we can construct a Dudeney set of K_{n+1}. Furthermore, we extend it to a double Dudeney set.

1. はじめに

$K_n = (V_n, E_n)$ を n 個の頂点をもつ完全グラフとする．K_n の任意の 2-path (長さ 2 の path) をちょうど 1 回ずつ含む Hamilton cycle の集合を K_n の Dudeney 集合という．すべての K_n に対して Dudeney 集合を構成する問題を Dudeney の円卓問題と呼んでいる．

n が偶数のときの Dudeney 集合は既に構成されているが [3]，n が奇数のときの Dudeney 集合については，現在までに構成されているのは，わずかに $n = p+2$ (p は奇素数で 2 が原始根) のときと [1], $n = 2^e + 1$ (e は自然数) のとき [4] のみである．

この論文では，p が素数のとき，K_{p+1} の黒色1因子を定義し，それを用いて K_{p+2} の Dudeney 集合が構成できることを示す．従って，黒色1因子を構成することが K_{p+2} の場合の Dudeney の円卓問題を解決するための重要な鍵となるが，コンピュータで調べた結果，すべての素数に対して黒色1因子が存在するとは限らないことが分かった．黒色1因子が存在するための素数 p の条件や，存在するときのその構成法については未解決である．さらに，二重Dudeney 集合を構成するため，黒色1因子を拡張する．

2. 記号と準備

$n = p+1, r = (p-1)/2$ とおく．ここで p は奇素数 ≥ 5 とする．K_n の 頂点集合を

$$V_n = \{\infty\} \cup \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$$

とおき，1 因子 F_i $(0 \leq i \leq p-1)$ を

$$F_i = \{\{\infty, i\}\} \cup \{\{a,b\} \in E_n \mid a, b \neq \infty, a+b \equiv 2i \pmod{p}\}$$

と定義する．

頂点の置換を $\sigma = (\infty)(0\ 1\ 2\ 3\ \cdots\ p-1)$ と定義し，$\Sigma = <\sigma>$ とおく．cycle や circuit の集合 $\mathcal{C}$ に対して，$\Sigma\mathcal{C} = \{\sigma^t C \mid 0 \leq t \leq p-1, C \in \mathcal{C}\}$ と定める．

$\{1, 2, 3, \cdots, p-1\}$ の部分集合 H が，$H \cup (-H) = \{1, 2, 3, \cdots, p-1\}$, $|H| = (p-1)/2$ を満たすとき，H は mod p の half-set であるという．よく知られているように，mod p の任意の half-set H に対して，$\Sigma\{F_0 \cup F_i \mid i \in H\}$ は K_n の Dudeney 集合である．

任意の枝 $\{a,b\} \in K_n$ に対して，枝の長さ $d(a,b)$ を次のように定義する．

$$d(a,b) = \begin{cases} \min\{p - |b-a|, |b-a|\} & (a, b \neq \infty \text{ のとき}) \\ \infty & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

また，枝の色 $c(a,b)$ を次のように定義する．

$$c(a,b) = i \quad (\{a,b\} \in F_i \text{のとき } (0 \leq i \leq p-1))$$

色 i, j $(0 \leq i \leq p-1)$ が $i = j$ または $i + j = p$ を満たすとき，i と j は同値であるといい $i \sim j$ と書く．

注1. 枝の長さは $\infty, 1, 2, \ldots, r$ の $r+1$ 種類，枝の色は $0, 1, 2, \ldots, p-1$ の p 種類，同値でない色は 0, 1 (または -1), 2 (または -2), ..., r (または $-r$) の $r+1$ 種類ある．

注2. F_i $(0 \leq i \leq p-1)$ は，同色の枝からなる 1 因子である．特に色 0 は白とし，F_0 を白色 1 因子と呼ぶことがある．

$n' = n + 1 = p + 2$ とおき，$K_{n'} = (V_{n'}, E_{n'})$, $V_{n'} = V_n \cup \{\alpha\}$ とする．σ を $V_{n'}$ の置換 $\sigma = (\infty)(\alpha)(0\ 1\ 2\ 3\ \cdots\ p-1)$ に拡張しておく．

3. 黒色 1 因子

3.1 定義 K_n の 1 因子 B は，次の条件を満たすとき黒色 1 因子と呼ばれる．
(1) $F_0 \cup B$ は Hamilton cycle である．
(2) B は全ての長さ $(\infty, 1, 2, \ldots, r)$ を持つ．
(3) B は 0 以外の全ての同値でない色を持つ．

B に含まれる枝を $e_1 = \{x_1, y_1\}, e_2 = \{x_2, y_2\}, \cdots, e_r = \{x_r, y_r\}, e_{r+1} = \{x_{r+1}, y_{r+1}\}$ とし，それらの色を順に $i_1, i_2, \cdots, i_r, i_{r+1}$ とする．枝は $r+1$ 本あるが，色は r 色であるから，同じ色の枝が 2 本ある．その枝を e_r, e_{r+1} としても一般性を失わない．すなわち，$i_r \sim i_{r+1}$ とする．

$H = \{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$ と決める．H はhalf-set であるから，

$$\mathcal{C} = \{F_0 \cup F_{i_s} \mid 1 \leq s \leq r\}$$

とおくとき，$\Sigma\mathcal{C}$ は K_n の Dudeney 集合となる．

B の各枝に α を挿入してできる $K_{n'}$ の道 (path) の集合を B^α と書く．すなわち，

$$B^\alpha = \{(x_s, \alpha, y_s) \mid 1 \leq s \leq r+1\}$$

とする．ここで，$(x_s, \alpha, y_s) = (y_s, \alpha, x_s)$ とみなす．さらに

$$\mathcal{B}^\alpha = F_0 \cup B^\alpha$$

とおく．$\mathcal{B}^\alpha$ は $K_{n'}$ の circuit である．

3.2 命題　$\Sigma(\mathcal{C} \cup \{\mathcal{B}^\alpha\})$ は $K_{n'}$ の任意の 2-path をちょうど 1 回ずつ含む．

証明　$K_{n'}$ の 2-path を 次の 8 種類に分ける．ここで，$a, b, c \neq \infty, \alpha$ とする:
(i) (a, b, c), (ii) (a, ∞, b), (iii) (∞, a, b), (iv) (a, α, b), (v) (α, a, b), (vi) (α, ∞, a), (vii) (α, a, ∞), (viii) (∞, α, a).

このうち，(i), (ii), (iii) は K_n の 2-path でもあるので，$\Sigma\mathcal{C}$ に含まれている．以下，(iv), (v), (vi), (vii), (viii) の各枝が $\Sigma\{\mathcal{B}^\alpha\}$ に含まれることを示す．

(iv) B は全ての長さを持つことより，$\Sigma B = E_n$．よって，2-path (a, α, b) は $\Sigma\{B^\alpha\}$ に含まれる．

(v) $\{a, b\}$ に σ を何回か作用させて F_0 に含まれるようにすることができる (F_0 は全ての長さを持つことより)．よって $\{a, b\} \in F_0$ と仮定して一般性を失わない．(α, a, b) も (α, b, a) も $\mathcal{B}^\alpha$ に属する．

(vi), (vii) 同様に，$a = 0$ として一般性を失わない．そのとき 2-path $(\alpha, \infty, 0)$, $(\alpha, 0, \infty)$ は$\mathcal{B}^\alpha$ に属する．

(viii) 同様に，$\sigma^t\{\infty, a\} = \{\infty, b\} \in B$ とできる．そのとき 2-path (∞, α, b) は $\mathcal{B}^\alpha$ に属する．　□

$1 \leq s \leq r+1$ について，枝 $e_s = \{x_s, y_s\}$ は F_{i_s} に属する．そこで，$1 \leq s \leq r$ について

$$F'_{i_s} = F_{i_s} \setminus \{\{x_s, y_s\}\} \cup \{\{x_s, \alpha\}, \{\alpha, y_s\}\}$$

と定義する．また

$$B' = \{\{x_1, y_1\}, \cdots, \{x_r, y_r\}, \{x_{r+1}, \alpha\}, \{\alpha, y_{r+1}\}\}$$

とおく．

$\mathcal{C}$ が cycle または circuit の集合のとき，$\mathcal{C}$ に含まれる 2-path 全部からなる集合を $\pi(\mathcal{C})$ と書く．

3.3 命題　$\pi(\{F_0 \cup F'_{i_s} \mid 1 \leq s \leq r\} \cup \{F_0 \cup B'\}) = \pi(\{F_0 \cup F_{i_s} \mid 1 \leq s \leq r\} \cup \{F_0 \cup B^{\alpha}\})$.

証明　$(\cup_{1 \leq s \leq r} F_i) \cup B^{\alpha}$ と $(\cup_{1 \leq s \leq r} F'_i) \cup B'$ に属する枝の集合が等しいことより言える.

3.4 定理　$\mathcal{H} = \Sigma(\{F_0 \cup F'_{i_s} \mid 1 \leq s \leq r\} \cup \{F_0 \cup B'\})$ は $K_{n'}$ の Dudeney 集合である.

証明　命題 3.2, 3.3 より，$\mathcal{H}$ は $K_{n'}$ の任意の 2-path をちょうど 1 回ずつ含む．また，$\mathcal{H}$ の各要素が Hamilton cycle であることは明らかである．故に $\mathcal{H}$ は $K_{n'}$ の Dudeney 集合である.　□

以上で，K_n に黒色 1 因子が存在すれば $K_{n'}$ の Dudeney 集合が構成されることが示された．各素数 p に対し，黒色1因子が存在するかどうかをコンピュータにより調べた結果を次に示す．黒色1因子が存在すれば，それを B とおくと，iB $(1 \leq i \leq p-1)$ は全て異なる黒色1因子である．従って，$\{\infty, 1\}$ の枝を持つ黒色1因子に限定して探索し，総数は $p-1$ 倍することにより求めた.

$p=5$　なし
$p=7$　総数 1×6 個

$0-3$,	length $=3$,	colour $=-2$
$4-2$,	length $=2$,	colour $=3$
$5-6$,	length $=1$,	colour $=2$
$1-\infty$,	length $=\infty$,	colour $=1$

$p=11$　なし
$p=13$　なし
$p=17$　総数 21×16 個

$0-3$,	length $=3$,	colour $=-7$
$14-13$,	length $=1$,	colour $=5$
$4-9$,	length $=5$,	colour $=-2$
$8-15$,	length $=7$,	colour $=3$
$2-6$,	length $=4$,	colour $=4$
$11-5$,	length $=6$,	colour $=8$
$12-10$,	length $=2$,	colour $=-6$
$7-16$,	length $=8$,	colour $=3$
$1-\infty$,	length $=\infty$,	colour $=1$

$p=19$　なし
$p=23$　総数 538×22 個

$0-3,$	length$=3,$	colour $=-10$
$20-8,$	length$=11,$	colour $=-9$
$15-9,$	length$=6,$	colour $=-11$
$14-18,$	length$=4,$	colour $=-7$
$5-10,$	length$=5,$	colour $=-4$
$13-6,$	length$=7,$	colour $=-2$
$17-16,$	length$=1,$	colour $=5$
$7-21,$	length$=9,$	colour $=-9$
$2-4,$	length$=2,$	colour $=3$
$19-11,$	length$=8,$	colour $=-8$
$12-22,$	length$=10,$	colour $=-6$
$1-\infty,$	length $=\infty,$	colour $=1$

$p=29$ なし
$p=31$ 総数不明 (計算時間が膨大のため)

$0-3,$	length $=3,$	colour $=-14$
$28-11,$	length $=14,$	colour $=4$
$20-24,$	length $=4,$	colour $=-9$
$7-12,$	length $=5,$	colour $=-6$
$19-27,$	length $=8,$	colour $=-8$
$4-2,$	length $=2,$	colour $=3$
$29-9,$	length $=11,$	colour $=-12$
$22-10,$	length $=12,$	colour $=-15$
$21-14,$	length $=7,$	colour $=2$
$17-23,$	length $=6,$	colour $=-11$
$8-18,$	length $=10,$	colour $=13$
$13-26,$	length $=13,$	colour $=4$
$5-6,$	length $=1,$	colour $=-10$
$25-16,$	length $=9,$	colour $=5$
$15-30,$	length $=15,$	colour $=7$
$1-\infty,$	length $=\infty,$	colour $=1$

例 $p=7, n=p+1=8, n'=p+2=9$ のとき，上の結果より，

$$B=\{\{\infty,1\},\{5,6\},\{2,4\},\{0,3\}\}$$

は黒色 1 因子である．$H=\{1,2,3\}$ と決める．

$$B^{\alpha}=\{(\infty,\alpha,1),(5,\alpha,6),(2,\alpha,4),(0,\alpha,3)\}$$

であり，

$$F_1' = \{\{\infty, \alpha\}, \{\alpha, 1\}, \{0, 2\}, \{6, 3\}, \{5, 4\}\}$$
$$F_2' = \{\{\infty, 2\}, \{1, 3\}, \{0, 4\}, \{5, \alpha\}, \{\alpha, 6\}\}$$
$$F_3' = \{\{\infty, 3\}, \{2, \alpha\}, \{\alpha, 4\}, \{1, 5\}, \{0, 6\}\}$$
$$B' = \{\{\infty, 1\}, \{5, 6\}, \{2, 4\}, \{0, \alpha\}, \{\alpha, 3\}\}.$$

従って，K_9 の Dudeney 集合 $\mathcal{H}$ が得られる．

$$\mathcal{H} = \Sigma\{(\infty, 0, 2, 5, 4, 3, 6, 1, \alpha), (\infty, 0, 4, 3, 1, 6, \alpha, 5, 2), (\infty, 0, 6, 1, 5, 2, \alpha, 4, 3), (\infty, 0, \alpha, 3, 4, 2, 5, 6, 1)\}$$

4. 黒色 1 因子の拡張

本節以降は，$n = p+1$ における p は素数であるという条件をはずし，p は任意の奇数 ≥ 5 とする．

G_i $(0 \leq i \leq r)$ は K_n の 1 因子であり，$\mathcal{D} = \{G_0 \cup G_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ とおくとき，$\Sigma\mathcal{D}$ が K_n の Dudeney 集合であるとする．ここで，G_0 は全ての長さを持つ 1 因子であるとする．

4.1 定義 K_n の 1 因子 B は，次の条件を満たすとき，$\mathcal{D}$ に関して黒色 1 因子であるという．
(1) $G_0 \cup B$ は Hamilton cycle である．
(2) B は全ての長さを持つ．
(3) $|B \cap G_i| \geq 1$ $(1 \leq i \leq r)$.

B の各枝に α を挿入してできる $K_{n'}$ の道の集合を B^α と書き，$\mathcal{B}^\alpha = G_0 \cup B^\alpha$ とおく．$\mathcal{B}^\alpha$ は $K_{n'}$ の circuit である．

4.2 命題 $\Sigma(\mathcal{D} \cup \{\mathcal{B}^\alpha\})$ は $K_{n'}$ の任意の 2-path をちょうど 1 回ずつ含む．

$e_i = \{x_i, y_i\} \in B \cap G_i$ $(1 \leq i \leq r)$ とおき，§3 と同様に，

$$G_i' = G_i \setminus \{\{x_i, y_i\}\} \cup \{\{x_i, \alpha\}, \{\alpha, y_i\}\} \ (1 \leq i \leq r),$$

$$B' = \{\{x_1, y_1\}, \cdots, \{x_r, y_r\}, \{x_{r+1}, \alpha\}, \{\alpha, y_{r+1}\}\}$$

と定義すると次が成り立つ．

4.3 命題 $\pi(\{G_0 \cup G_i' \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{G_0 \cup B'\}) = \pi(\{G_0 \cup G_i \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{G_0 \cup B^\alpha\})$.

4.4 定理 $\mathcal{H} = \Sigma(\{G_0 \cup G_i' \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{G_0 \cup B'\})$ は $K_{n'}$ の Dudeney 集合である．

5. 二重 Dudeney 集合

K_n の任意の 2-path をちょうど 2 回ずつ含む Hamilton cycle の集合を，K_n の 二重 Dudeney 集合という．

Dudeney 集合が存在すれば二重 Dudeney 集合も存在する (2 倍すればよい) ので，偶数次の二重 Dudeney 集合の構成問題は解決済みである．奇数次の二重 Dudeney 集合については，p が素数のとき K_{p+2} の二重 Dudeney 集合が構成されている [2]．この節では，[2] のアイデアを一般の形に定式化する．これは，黒色 1 因子の拡張であり，一般の奇数次二重 Dudeney 集合の構成に役立つと思われる．

G_i $(0 \leq i \leq p-1)$ を K_n の 1 因子とする．$\mathcal{D}_2 = \{G_0 \cup G_i \mid 1 \leq i \leq p-1\}$ とおくとき，$\Sigma\mathcal{D}_2$ が K_n の二重 Dudeney 集合であるとする．ここで，G_0 は全ての長さを持つ 1 因子であるとする．

5.1 定義 B_1, B_2 は K_n の 1 因子とする．$\{B_1, B_2\}$ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{D}_2$ に関して黒色であるという．

(1) $G_0 \cup B_1, G_0 \cup B_2$ は Hamilton cycle である．

(2) B_j は全ての長さを持つ．$(j = 1, 2)$

(3) $\{x_{r+1}, y_{r+1}\} \in B_1$, $\{x'_{r+1}, y'_{r+1}\} \in B_2$, $e_i \in G_i$ $(1 \leq i \leq p-1)$ が存在して，

$$(B_1 \setminus \{\{x_{r+1}, y_{r+1}\}\}) \cup (B_2 \setminus \{\{x'_{r+1}, y'_{r+1}\}\}) = \{e_1, \cdots, e_{p-1}\}$$

が成り立つ．$e_i = e_j$ の場合，上の集合及び等式は重複も込めて考える．

B_1, B_2 の各枝に α を挿入してできる $K_{n'}$ の道の集合を，それぞれ B_1^α, B_2^α と書き，

$$\mathcal{B}_j^\alpha = G_0 \cup B_j^\alpha \quad (j = 1, 2)$$

とおく．$\mathcal{B}_j^\alpha$ は $K_{n'}$ の circuit である．

5.2 命題 $\Sigma(\mathcal{D}_2 \cup \{\mathcal{B}_1^\alpha, \mathcal{B}_2^\alpha\})$ は $K_{n'}$ の任意の 2-path をちょうど 2 回ずつ含む．

§3, 4 と同様に G'_i $(1 \leq i \leq p-1)$, B'_j $(1 \leq j \leq 2)$ を定義すると，次が成り立つ．

5.3 定理

$$\mathcal{H} = \Sigma(\{G_0 \cup G'_i \mid 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{G_0 \cup B'_1\} \cup \{G_0 \cup B'_2\})$$

は $K_{n'}$ の 二重 Dudeney 集合である．

謝辞

本論文の寄稿に際し，お茶の水女子大学名誉教授林田侃先生より，有益なご指摘とご教示をいただきました．ここに，深謝の意を表します．

参考文献

[1] K.Heinrich, M.Kobayashi and G.Nakamura, Dudeney's Round Table Problem, *Annals of Discrete Math.* **92** (1991) 107-125.

[2] K.Heinrich, M.Kobayashi and G.Nakamura, Exact Coverings of 2-paths by Hamilton cycles for K_{p+2}, preprint (1992).

[3] M.Kobayashi, Kiyasu-Z. and G.Nakamura, A solution of Dudeney's round table problem for an even number of people, *J. Combinatorial Theory* (A) **62** (1993), 26-42.

[4] G.Nakamura, Kiyasu-Z. and N.Ikeno, Solution of the round table problem for the case of p^k+1 persons, *Commentarii Mathematici Universitatis Santi Pauli* **29** (1980) 7-20.